L'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

Antonella Basso

Dipartimento di Matematica Applicata
Università Ca' Foscari di Venezia

L'IMMUNIZZAZIONE FINANZIARIA

Riferimenti utili per approfondimenti

- M. DE FELICE, F. MORICONI, *La teoria dell'immunizzazione finanziaria: Modelli e strategie*, Il Mulino, Bologna, 1991 (cap. 3 e 4)

- F. CACCIAFESTA, *Lezioni di matematica finanziaria classica e moderna*, Giappichelli, Torino, terza ed., 1997 (cap. 10)

- S.G. KELLISON, *The theory of interest*, Irwin, Homewood, IL, second ed., 1991 (par. 9.9)

- J.J. McCUTCHEON, W.F. SCOTT, *An introduction to the mathematics of finance*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986 (par. 10.6–10.8)

Introduzione al problema della gestione di attività e passività finanziarie

- Consideriamo le interrelazioni tra attività e passività finanziarie per un'azienda (ad esempio per una compagnia di assicurazioni).

- Le **attività** genereranno una successione di flussi di cassa
$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$
alle epoche
$$t_1, t_2, \ldots, t_n.$$

  Analogamente, le **passività** genereranno una successione di flussi di cassa
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$
alle epoche $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

- Il problema è come raggiungere un **equilibrio** tra i flussi di cassa in entrata e in uscita alle varie epoche.

- Tale equilibrio è richiesto per evitare il rischio di effetti avversi causati da **cambiamenti nel livello dei tassi** d'interesse.

- **Esempio 1** Si supponga che un istituto finanziario (una banca o una compagnia di assicurazioni) emetta uno strumento finanziario con scadenza tra un anno che garantisce un tasso d'interesse prefissato (ad esempio, un certificato di deposito).

  Se il denaro così raccolto (le attività) è investito troppo a breve o troppo a lungo termine l'istituto finanziario si espone ad un rischio di tasso.

1) Si consideri il caso in cui le attività siano **investite troppo a lungo termine**, ad esempio in investimenti con durata media finanziaria uguale a 2.

   L'istituto finanziario è vulnerabile di fronte a possibili perdite nel caso in cui i tassi d'interesse salgano.

   Infatti, se nel frattempo i tassi salgono, alla fine dell'anno i clienti ritireranno i loro fondi per reinvestirli ad un tasso più elevato, e l'istituto perciò potrebbe dover vendere i titoli in portafoglio.

   Tuttavia, l'aumento dei tassi di mercato causa una diminuzione nel valore dei titoli posseduti, e si potrebbe così dover subire una perdita.

2. Si consideri ora il caso in cui le attività siano **investite troppo a breve termine**, per esempio in investimenti a brevissimo termine con duration prossima a zero.

   In questo caso l'istituto finanziario è vulnerabile di fronte a perdite che potrebbe subire nel caso in cui i tassi d'interesse di mercato diminuiscano.

   Infatti, poichè le sue attività sono investite a brevissimo termine, i suoi guadagni in termini di interessi maturati diminuirebbero rapidamente in caso di discesa dei tassi, e potrebbero non essere sufficienti a coprire l'interesse garantito sugli strumenti finanziari ad un anno emessi dall'istituto.

- L'**immunizzazione finanziaria** è una tecnica che è stata sviluppata per cercare di strutturare le attività e le passività in modo da ridurre o addirittura eliminare le possibili perdite causate da cambiamenti nel livello dei tassi d'interesse.

L'immunizzazione deterministica

- È l'immunizzazione effettuata in ipotesi di struttura a termine dei tassi d'interesse piatta.

⇒ Si suppone che esista un **unico tasso d'interesse** di mercato i, indipendente dalla durata dell'investimento.

- Ci si chiede cosa succede al valore di un investimento **se il tasso d'interesse di mercato** i **varia** in modo aleatorio in un istante futuro.

- Si consideri un **flusso di cassa positivo** a cui dà diritto un impiego in titoli obbligazionari con o senza cedola

$$\{ (x_j, t_j) : j = 1, 2, \ldots, n \} \qquad\qquad x_j > 0 \, \forall \, j$$

- Il **valore** di questo flusso di cassa all'istante $t = 0$ dipende dal valore del tasso d'interesse di mercato i con cui si attualizzano i flussi di cassa futuri e coinciderà con il suo prezzo di mercato

$$V(0; i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (1 + i)^{-t_j} = P(0; i)$$

⇒ Il prezzo è funzione decrescente del tasso i.

- Si supponga che l'investitore intenda:

1. acquistare il cash-flow (titolo o portafoglio di titoli) all'epoca iniziale $t = 0$ al prezzo $P(0; i) = V(0; i)$;

2. reinvestire ogni flusso al tasso d'interesse di mercato;

3. smobilizzare l'impiego prima della scadenza, vendendo i titoli all'epoca $0 < s < T = t_n$.

- In tale caso:

a) resta l'esborso iniziale $V(0; i)$;

b) resta il montante dei flussi in entrata precedenti l'epoca di disinvestimento s

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \qquad\qquad \text{con } t_k \leq s < t_{k+1}$$

c) scompaiono i flussi successivi ad s ,

$$x_{k+1}, x_{k+2} \ldots, x_n,$$

sostituiti dal prezzo di vendita ottenuto in s , $P(s; i)$.

- Se il tasso d'interesse di mercato i è rimasto inalterato, all'epoca s si otterrà il montante dell'investimento iniziale $V(0;i)$, capitalizzato all'epoca s in base al tasso i

$$\begin{aligned} V(s;i) &= V(0;i)(1+i)^s = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{-t_j}(1+i)^s = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{s-t_j} = \\ &= \sum_{t_j \le s} x_j (1+i)^{s-t_j} + \sum_{t_j > s}^{n} x_j (1+i)^{-(t_j-s)} \end{aligned}$$

- Ponendo

$$M(s;i) = \sum_{t_j \le s} x_j (1+i)^{s-t_j}$$

$$P(s;i) = \sum_{t_j > s}^{n} x_j (1+i)^{-(t_j-s)}$$

si trova

$$V(s;i) = M(s;i) + P(s;i)$$

Il rischio di tasso

⇒ Come cambia il valore dell'impiego, smobilizzato all'epoca s , se nel frattempo il tasso d'interesse di mercato cambia?

- **Ipotesi**: il tasso cambia prima della scadenza del primo flusso, cioè in un'epoca $t^* \leq t_1$ non successiva a t_1 .

⇒ Le due componenti del valore dell'impiego in s

- montante M dei flussi precedenti $x_j : t_j \leq s$
- valore attuale P dei flussi successivi $x_j : t_j > s$ (che rappresenta il prezzo di smobilizzo)

reagiscono in direzioni opposte a una variazione nel tasso i .

- **Se il tasso d'interesse di mercato aumenta** (passa a $i_1 > i$)

- il montante M dei flussi precedenti aumenta
- il valore attuale P dei flussi successivi (prezzo di smobilizzo) diminuisce.

⇒ L'effetto complessivo sul valore $V(s; i)$ non è facilmente prevedibile.

- Il **rischio di tasso** è la risultante di due componente distinte:

1. il **rischio di reimpiego**: all'aumentare (diminuire) del tasso d'interesse il montante M dei flussi precedenti aumenta (diminuisce)

2. il **rischio di prezzo**: all'aumentare (diminuire) del tasso i il valore di smobilizzo dell'investimento residuo diminuisce (aumenta).

- **Esempio 1.** Si consideri il flusso di cassa

$$\{\,(10,1),(10,2),(10,3),(100,4)\,\}$$

e sia $i = 0.1$. Si trova

$$V(0;0.1) = 10 \cdot 1.1^{-1} + 10 \cdot 1.1^{-2} + 10 \cdot 1.1^{-3} + \\ + 100 \cdot 1.1^{-4} = 93.1698$$

Se si desidera smobilizzare l'investimento all'epoca $s = 3$ si ha

$$M(3;0.1) = 10 \cdot 1.1^2 + 10 \cdot 1.1 + 10 = 33.1$$

$$P(3;0.1) = 100 \cdot 1.1^{-1} = 90.\overline{90}$$

$$V(3;0.1) = M(3;0.1) + P(3;0.1) = 33.1 + 90.9091 = \\ = 124.0091$$

Se i aumenta e passa a $i_1 = 0.15$ si avrà in $s = 3$

$$M(3; 0.15) = 34.725$$
$$P(3; 0.15) = 86.9565$$
$$V(3; 0.15) = M(3; 0.15) + P(3; 0.15) = 121.6815$$

Si ha perciò $V(3; 0.15) < V(3; 0.1)$.

Se l'orizzonte temporale aumenta e l'istante di smobilizzo diviene $s = 3.5$ si trova invece

$$M(3.5; 0.1) = 34.7156$$
$$P(3.5; 0.1) = 95.3463$$
$$V(3.5; 0.1) = M(3.5; 0.1) + P(3.5; 0.1) = 130.0618$$

e quando il tasso d'interesse aumenta si ha

$$M(3.5; 0.15) = 37.2384$$
$$P(3.5; 0.15) = 93.2505$$
$$V(3.5; 0.15) = M(3.5; 0.15) + P(3.5; 0.15) =$$
$$= 130.4889$$

In questo caso si ha $V(3.5; 0.15) > V(3.5, 0.1)$. ■

- **Di fronte ad un aumento del tasso d'interesse:**

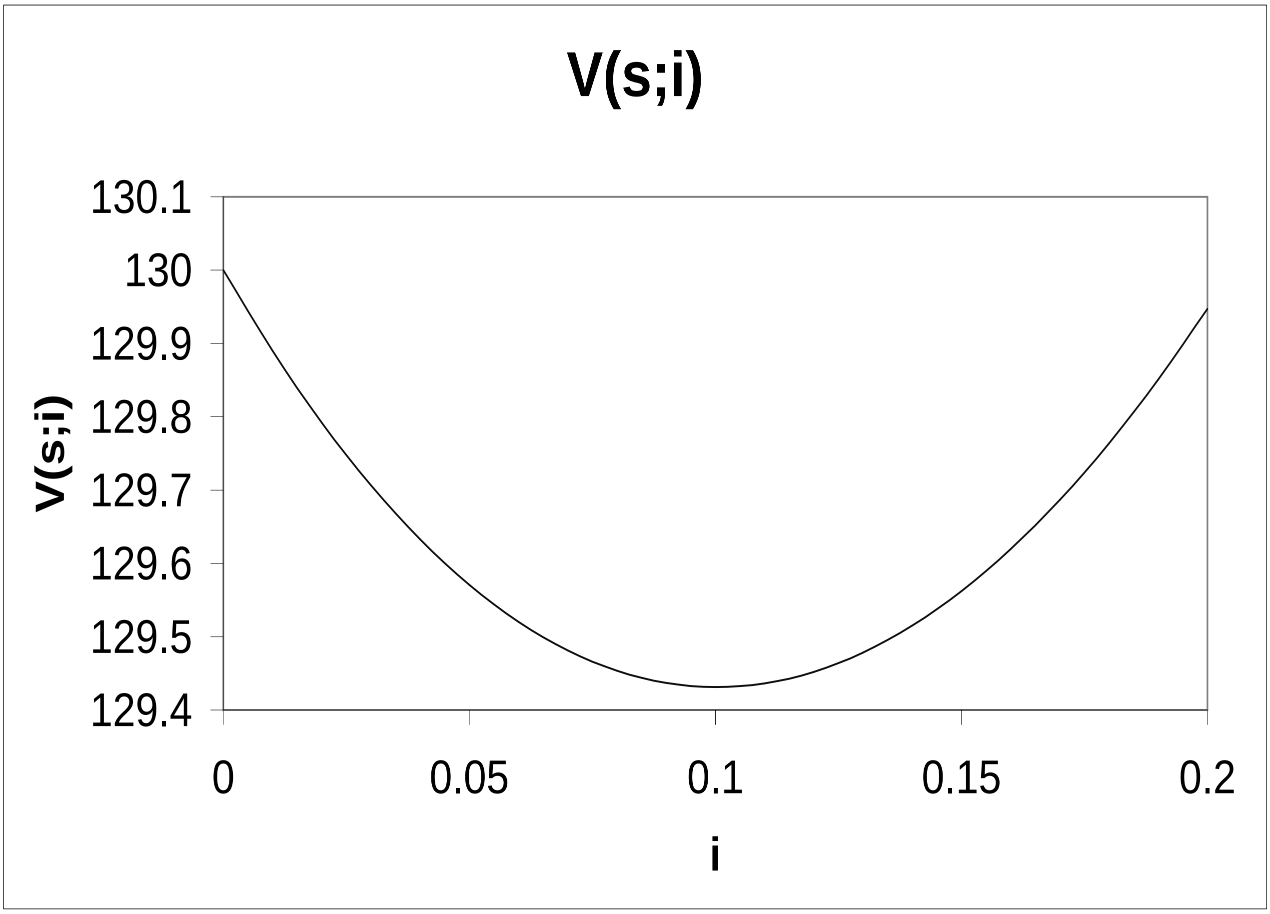
a) **per impieghi di breve durata** (s piccolo) l'incremento di M è piccolo mentre la diminuzione di P è più rilevante; è perciò probabile che si osservi una perdita di valore di $V(s;i)$;

b) **per impieghi di lunga durata** (s elevato) l'incremento di valore del montante M è più rilevante della perdita di valore del prezzo di smobilizzo P ; è pertanto probabile che si osservi un aumento del valore di $V(s;i)$.

La durata di immunizzazione

⇒ C'è una durata τ (**durata di immunizzazione**) in corrispondenza della quale i due effetti su M e P agiscano in modo che il valore di V non scenda di fronte a variazioni nei tassi sia in aumento che in diminuzione?

È la domanda che si pongono le tecniche di immunizzazione finanziaria.


V(s;i)
130.1
130
129.9
129.8
129.7
129.6
129.5
129.4
V(s;i)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
i

- Si dimostra che tale scadenza privilegiata esiste ed è rappresentata dalla **durata media finanziaria**

$$
\begin{aligned}
MD = -\frac{\frac{\partial P}{\partial i}}{P}(1+i) = -\frac{\frac{\partial V}{\partial i}}{V}(1+i) = \\
= \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j x_j (1+i)^{-t_j}}{V} \\
= \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j x_j (1+i)^{-t_j}}{\sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{-t_j}}
\end{aligned}
$$

- Infatti, se la durata s coincide con la durata media finanziaria del flusso di cassa MD, il valore totale dell'impiego (montante dei reimpieghi + prezzo di smobilizzo) risente in maniera minima di variazioni (positive o negative) del tasso d'interesse di mercato. Inoltre, le risposte di tale valore a variazioni nel tasso risultano favorevoli all'investitore.

- Vogliamo dimostrare questa proprietà della duration.

- Vogliamo cioè determinare, se esiste, una durata s tale che

$$V(s; i_1) \geq V(s; i) \qquad\qquad \forall i_1 \neq i.$$

In altre parole, vogliamo determinare, se possibile, s in modo che in corrispondenza del tasso d'interesse di mercato i vigente il valore dell'impiego $V(s; i)$ abbia un punto di minimo rispetto al tasso d'interesse.

- Affinché i sia un punto di minimo per V

$$\Rightarrow \ \frac{\partial V}{\partial i}(s; i) = 0$$

Si ha

$$V(s; i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{s-t_j}$$

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial i}(s; i) = \sum_{j=1}^{n} (s - t_j) x_j (1+i)^{s-t_j-1} =$$

$$= (1+i)^{s-1} \left[\sum_{j=1}^{n} (s - t_j) x_j (1+i)^{-t_j} \right] =$$

$$= (1+i)^{s-1} \left[s \sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{-t_j} - \sum_{j=1}^{n} t_j x_j (1+i)^{-t_j} \right]$$

Pertanto si ha $\frac{\partial V}{\partial i}(s;i)=0 \quad \Leftrightarrow$

$$s\sum_{j=1}^{n} x_j(1+i)^{-t_j} - \sum_{j=1}^{n} t_j x_j (1+i)^{-t_j} = 0$$

cioè se la durata s soddisfa la relazione

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{n} t_j x_j (1+i)^{-t_j}}{\sum_{j=1}^{n} x_j (1+i)^{-t_j}} = MD$$

- Per verificare che si tratta proprio di un punto di minimo assoluto (per cui se i cambia valore, il valore dell'impiego $V(s;i)$ non può diminuire ma solo aumentare), verifichiamo che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(s=MD;i) > 0 \qquad\qquad \forall\, i$$

Si ha

$$\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(s=MD;i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (s-t_j)(s-t_j-1)x_j(1+i)^{s-t_j-2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (s-t_j)^2 x_j (1+i)^{s-t_j-2} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} (s-t_j) x_j (1+i)^{s-t_j-2}$$

Il secondo termine può essere scritto

$$\sum_{j=1}^{n}(s-t_j)x_j(1+i)^{s-t_j-2} =$$
$$= (1+i)^{-1}\sum_{j=1}^{n}(s-t_j)x_j(1+i)^{s-t_j-1} =$$
$$= (1+i)^{-1}\frac{\partial V}{\partial i}(s;i)$$

e per $s = MD$ è nullo in quanto $\frac{\partial V}{\partial i}(MD;i) = 0$.

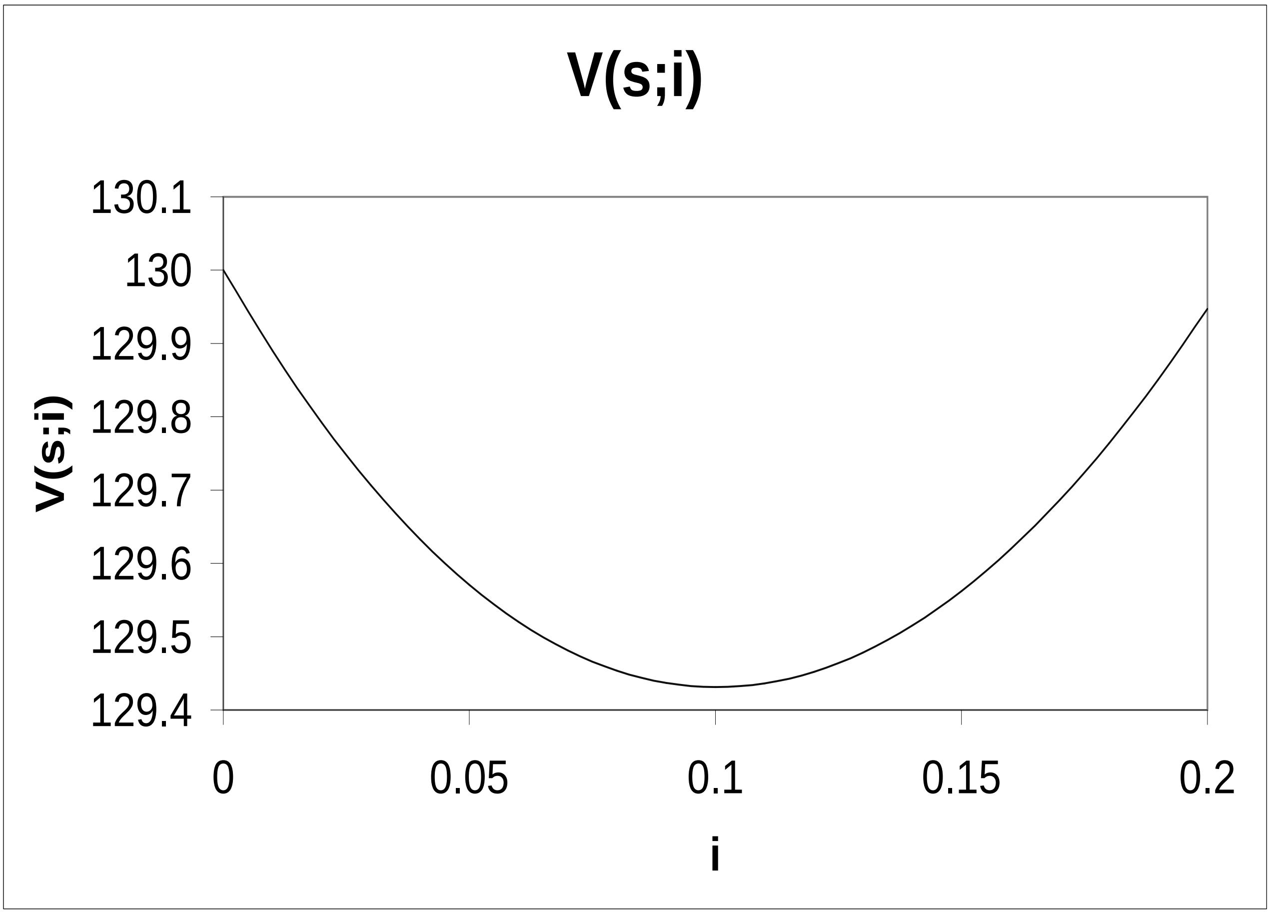
Pertanto per $s = MD$ la derivata seconda risulta

$$\frac{\partial^2 V}{\partial i^2}(s = MD;i) = \sum_{j=1}^{n}(s-t_j)^2 x_j(1+i)^{s-t_j-2} - 0 > 0$$

- **Esempio 2.** Con i dati dell'esempio 1 si trova

$$MD = 3.449$$
$$V(MD;0.1) = 129.431$$
$$V(MD;0.15) = 129.562$$
$$V(MD;0.05) = 129.570$$

■


V(s;i)
130.1
130
129.9
129.8
129.7
129.6
129.5
129.4
V(s;i)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
i

- Pertanto il cash flow all'epoca $s = MD$ risulta **immunizzato** dal rischio di tasso.

⇒ Un impiego di durata pari alla sua durata media finanziaria è immunizzato a fronte di shock esterni che modificano il tasso d'interesse.

- Tuttavia, se la duration non coincide con l'orizzonte temporale desiderato dall'investitore, l'immunizzazione non è, in generale, garantita.

⇒ In tale caso, conviene agire costruendo un opportuno portafoglio di titoli.

La costruzione di un portafoglio

- Si può dimostrare che, combinando opportunamente più cash-flow (più titoli) con lo stesso rendimento e con diverse durate medie finanziarie, è possibile ottenere per il portafoglio una qualunque duration compresa tra quella minima e quella massima dei titoli che lo compongono.

  È inoltre possibile modificare la duration del portafoglio variando la proporzione dei suoi impieghi.

- Consideriamo per semplicità un **portafoglio composto da due titoli** (cash-flow) aventi lo stesso rendimento e duration D_1 e D_2, rispettivamente; siano C_1, C_2 le somme investite in tali impieghi.

  Si dimostra che la **durata media finanziaria** di tale portafoglio è la media aritmetica ponderata delle duration dei singoli titoli, con pesi i capitali investiti

$$MD = \frac{D_1 C_1 + D_2 C_2}{C_1 + C_2} = D_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2} + D_2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

- Combinando i due titoli in proporzioni opportune, è possibile avere **immunizzazione in corrispondenza di una qualsiasi durata** $\bar{D}$ compresa tra D_1 e D_2 .

- Se si vuole ottenere una duration $D_1 \leq \bar{D} \leq D_2$ basta determinare i capitali investiti C_1 e C_2 (o le quote $C_1/(C_1 + C_2)$ e $C_2/C_1 + C_2)$) in modo che siano verificati i vincoli:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C & \text{vincolo di budget} \\ \dfrac{D_1 C_1 + D_2 C_2}{C_1 + C_2} = \bar{D} & \text{vincolo di duration} \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite C_1, C_2 . Si trova:

$$\frac{C_1}{C} = \frac{D_2 - \bar{D}}{D_2 - D_1} \qquad \frac{C_2}{C} = \frac{\bar{D} - D_1}{D_2 - D_1}$$

- Analogamente, se il portafoglio comprende m titoli con lo stesso rendimento e duration $D_1, D_2, \ldots, D_m$, con capitali impiegati $C_1, C_2, \ldots, C_m$, la durata media finanziaria del portafoglio è data dalla media aritmetica ponderata delle duration dei titoli componenti, con pesi i capitali investiti in essi

$$MD = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k C_k}{\sum_{k=1}^{m} C_k}$$

Limiti dell'immunizzazione deterministica

1. Non si considera la struttura per scadenza dei tassi d'interesse, che è supposta piatta.

2. Gli shock aleatori sui tassi sono di un unico tipo: si ha una variazione del tasso di mercato prima della scadenza del primo flusso, poi il tasso rimane costante (almeno fino a s).

⇒ Poiché potrebbe in realtà esserci più di una variazione di tasso, è opportuno che l'investitore controlli e riveda periodicamente il suo portafoglio, eventualmente ribilanciando il portafoglio se, in seguito a variazioni nei tassi, la sua duration non è più quella voluta.

Tuttavia ...

3. Le operazioni di ribilanciamento comportano dei costi di transazione, che abbassano la redditività dell'impiego.

L'immunizzazione semideterministica

- Supponiamo che, al tempo 0, un operatore preveda di dover pagare all'epoca $s > 0$ la somma S.

- Se egli acquista la quantità

$$S[1 + i(0, s)]^{-s}$$

di titoli a cedola nulla (TCN) unitari, si garantisce la sicurezza di poter effettuare il pagamento senza effettuare ulteriori esborsi.

- Non è però detto che il mercato offra dei TCN con scadenza s.

  In tal caso, si dovrà cercare disponibilità e obblighi futuri sincronizzando dei **titoli con cedola** (o dei portafogli di titoli con cedola).

- Consideriamo quindi un **portafoglio di titoli** che dà diritto a ricevere il seguente flusso di cassa positivo

$$\{\,(x_j, t_j) : j = 1, 2, \ldots, n\,\} \qquad\qquad x_j > 0\,\forall\, j$$

- Il **valore** di questo flusso di cassa all'istante $t = 0$ dipende dalla struttura per scadenza dei tassi d'interesse vigente in tale epoca e coinciderà con il suo prezzo di mercato

$$V(0) = \sum_{j=1}^{n} x_j v(0, t_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j [1+i(0, t_j)]^{-t_j} = P(0; i)$$

- Se la struttura per scadenza rimane coerente con la struttura dei tassi a termine, senza subire variazioni inattese, all'epoca s il valore del portafoglio è dato dal montante dell'investimento iniziale $V(0)$, capitalizzato all'epoca s in base al tasso $i(0, s)$

$$V(s) = V(0; i)[(1 + i(0, s)]^s =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j [1 + i(0, s, t_j)]^{-t_j}$$

- Ponendo

$$M(s) = \sum_{t_j \leq s} x_j[1 + i(0, t_j, s)]^{s-t_j}$$

$$P(s) = \sum_{t_j > s}^{n} x_j[1 + i(0, s, t_j)]^{-(t_j-s)}$$

si ha

$$V(s) = M(s) + P(s)$$

- La condizione in base alla quale il portafoglio di titoli deve essere costruito è che risulti

$$V(s) = \sum_{j=1}^{n} x_j[1 + i(0, s, t_j)]^{-t_j} = S.$$

- È chiaro, però, che se i tassi a pronti futuri non risulteranno uguali ai tassi forward previsti all'epoca 0 questa uguaglianza fra entrate e uscite potrà non valere.

- Definiamo la **duration di un generico flusso finanziario** $\{(x_1, t_1), (x_2, t_2), \ldots, (x_m, t_m)\}$, fissata la struttura a termine dei tassi d'interesse, come

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k v(0, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(0, t_k)} = \\ = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k v(0, t_k)}{V(0, (x_1, x_2, \ldots, x_m))}$$

- Si supponga che eventuali **variazioni dei tassi** di mercato avvengano per **shock additivi sull'intensità istantanea d'interesse** ($\delta_1(t) = \delta(t) + \varepsilon$), cioè, in termini di struttura a termine dei tassi d'interesse, che ogni fattore di montante sia moltiplicato per una costante $\alpha = e^{\varepsilon}$

$$1 + i_1(0, t_j) = [1 + i(0, t_j)]\alpha = [1 + i(0, t_j)]e^{\varepsilon}$$

Vale allora il seguente risultato.

- **Teorema di Fisher e Weil.**

  Se, in relazione ad una fissata struttura per scadenza dei tassi d'interesse, la duration del portafoglio D risulta uguale alla scadenza s per ogni $t \leq s$, allora il portafoglio è immunizzato nei confronti degli shock additivi indicati, in quanto il valore in s che si osserva dopo una variazione dei tassi del tipo visto è non inferiore al valore inizialmente previsto

$$V_1(s) \geq V(s).$$

Il caso di più uscite

- Supponiamo ora che le **attività** generino una **successione di flussi di cassa**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

alle epoche

$$t_1, t_2, \ldots, t_n$$

e che, analogamente, le **passività** generino una successione di flussi di cassa

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

alle epoche $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

- Supponiamo che inizialmente (all'epoca 0) i due flussi di cassa (in entrata e in uscita) abbiano lo stesso valore attuale

$$V(s; x_1, x_2, \ldots, x_n) = V(s; y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

- Cerchiamo delle **condizioni che garantiscano l'immunizzazione del flusso**

$$V(s; x_1, x_2, \ldots, x_n) - V(s; y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

inizialmente nullo, di fronte a shock del tipo visto (additivi) sulla struttura per scadenza dei tassi d'interesse.

- **Teorema di Redington.**

Se all'epoca 0 i due flussi $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ hanno lo stesso valore attuale e la stessa durata media finanziaria e, inoltre, la convessità delle entrate è superiore alla convessità delle uscite, la loro differenza risulta immunizzata rispetto a variazioni additive sufficientemente piccole in valore assoluto.