

ESERCIZI  
17 Ottobre 2009

**Ex.1** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{x^3 - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + x}{x^3 - 1}$$

**Sol.** Notiamo che la funzione  $\frac{3x^4+x}{x^3-1}$  è definita in  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , si può calcolare il limite per  $x$  che tende a  $+\infty$  e il limite per  $x$  che tende a  $-\infty$ . Raccogliamo la potenza massima di  $x$  sia a numeratore che a denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4(3 + \frac{1}{x^3})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{3 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} \right) \right] = +\infty$$

dato che per  $x$  che tende a  $+\infty$  la funzione entro parentesi tonde tende a 3. Il limite a  $-\infty$  della stessa funzione ha un risultato diverso:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4(3 + \frac{1}{x^3})}{x^3(1 - \frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( \frac{3 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} \right) \right] = -\infty$$

**Ex.2** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 3}{x^3 + 27} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + 3}{x^3 + 27}$$

**Sol.** La funzione  $\frac{x^5+3}{x^3+27}$  ha dominio  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ . si possono fare entrambi i limiti all'infinito. Raccogliamo sia numeratore che a denominatore la potenza di  $x$  di grado massimo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 3}{x^3 + 27} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5(1 + \frac{3}{x^5})}{x^3(1 + \frac{27}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( \frac{1 + \frac{3}{x^5}}{1 + \frac{27}{x^3}} \right) \right] = +\infty$$

notiamo che la funzione entro parentesi tonde tende a 1 mentre  $x^2$  tende a  $+\infty$ . Procedendo in modo analogo nel calcolo del limite per  $x$  che tende a  $-\infty$  della stessa funzione, si trova che il limite fa ancora  $+\infty$ .

**Ex.3** Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x^6 + 27} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{x^6 + 27}$$

**Sol.** La funzione  $\frac{x+3}{x^6+27}$  ha dominio  $\mathbb{R}$ . si possono fare entrambi i limiti all'infinito. Raccogliamo sia numeratore che a denominatore la potenza di  $x$  di grado massimo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x^6 + 27} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{x^6(1 + \frac{27}{x^6})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{x^5} \left( \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{27}{x^6}} \right) \right] = 0$$

Infatti la funzione entro parentesi tonde tende a 1 mentre  $\frac{1}{x^5}$  tende a zero. Procedendo in modo analogo nel calcolo del limite per  $x$  che tende a  $-\infty$  della stessa funzione, si trova che il limite fa ancora 0.

**Ex.4** Data la funzione

$$f(x) = \ln(x - x^2)$$

determinare dove essa è crescente e dove decrescente, dove è concava e dove convessa.

**Sol.** Il dominio della funzione è l'insieme dei valori di  $x$  tali che  $x - x^2 > 0$  ovvero l'intervallo  $(0, 1)$ . Per determinare crescita e decrescenza, dove la funzione è derivabile, studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x - x^2}(1 - 2x) = \frac{1 - 2x}{x - x^2}$$

ci interessa il segno della funzione solo in  $(0, 1)$  e ivi il denominatore è sempre positivo, mentre il numeratore è positivo solo in  $(0, \frac{1}{2})$  quindi  $f'(x) > 0$  in  $(0, \frac{1}{2})$  e  $f'(x) < 0$  in  $(\frac{1}{2}, 1)$  questo ci permette di dire che  $f(x)$  è strettamente crescente in  $(0, \frac{1}{2})$  e strettamente decrescente in  $(\frac{1}{2}, 1)$ . Per determinare la concavità e convessità di  $f$ , se  $f$  ammette derivata seconda, basta studiare il segno di  $f''(x)$  in  $(0, 1)$ .

Ora

$$f''(x) = \left( \frac{1 - 2x}{x - x^2} \right)' = \frac{-2(x - x^2) - (1 - 2x)^2}{(x - x^2)^2} = -\frac{2x^2 - 2x + 1}{(x - x^2)^2} = -\frac{x^2 + (x - 1)^2}{(x - x^2)^2} < 0$$

$\forall x \in (0, 1)$  quindi la funzione  $f(x)$  è sempre concava in  $(0, 1)$ .

**Ex. n.1 pag 271; n.1(a) pag 276; n.5(c) pag 229; n.14(e-h) pag 230; n.15(c) pag. 230**

**Ex.** Sia  $R(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x$  la funzione che indica, il ricavo in euro, dalla vendita della quantità  $x$  di un certo bene. Determinare il tasso medio di variazione nell'intervallo  $[10, 15]$  e nell'intervallo  $[10, 11]$  e il ricavo marginale in  $x = 10$ .