ESERCIZI

Ex.1 *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \ln(2-x) + \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 2 \\ \ln(x^2-3) & x \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

Sol. La funzione $f(x)$ è definita se e solo se sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

quindi il suo dominio è l'intervallo $[0, 2)$.

La funzione $g(x)$ è una funzione definita a tratti, il dominio si determina esaminando le condizioni di esistenza di $e^{\frac{1}{x}}$ per $x \in (-\infty, 2)$ e le condizioni di esistenza di $\ln(x^2-3)$ per $x \in [2, +\infty)$. Se consideriamo $e^{\frac{1}{x}}$ per $x \in (-\infty, 2)$ si deduce che $x \neq 0$; mentre se $x \in [2, +\infty)$ dato che il logaritmo è definito se $x < -\sqrt{3}$ oppure se $x > \sqrt{3}$, osservando che $\sqrt{3} < 2$, ne segue che nella semiretta $[2, +\infty)$ la $g(x)$ è sempre definita. Quindi il dominio della funzione è $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Ex.2 *Calcolare i seguenti limiti*:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1} \right)$$

Sol. Se consideriamo il primo limite, notiamo che il polinomio $x^2 - 1$ è positivo o nullo nelle semirette $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, quindi la funzione $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ è definita su di esse. Il limite è una forma indeterminata $''\frac{\infty}{\infty}''$, per il suo calcolo raccogliamo x^2 all'interno della radice e otteniamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

dato che $\sqrt{x^2} = |x|$: la radice quadrata assume valore positivo o nullo. Quindi se x tende a $-\infty$ il suo segno è negativo, $|x| = -x$ e il limite diventa

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -1$$

Se consideriamo la funzione $\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)$, essa è definita in $[0, +\infty)$ e per x che tende a $+\infty$ si ha la forma indeterminata $'' + \infty - \infty''$. Per questo vediamo $1 = \frac{a}{a}$ con $a = \left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$ e trasformiamo il limite in questo modo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) * 1\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) * \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - (x+1)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)} = 0$$

sfruttando il prodotto notevole $r^2 - s^2 = (r-s) * (r+s)$, in questo modo il numeratore diventa una costante e a denominatore non si ha una forma indeterminata, ma un'espressione che tende a $+\infty$.

Ex. dal libro di testo n. 4 e 5 a pag. 142; n.3 a pag 155; n.5 pag 173.

Ex.3 *Sia*

$$C(q) : [0, +\infty) \;\rightarrow\; \mathbb{R} \;\; \textit{definita da} \quad C(q) = 2q^2 + 3q + 4$$

la funzione che rappresenta il costo di produzione in funzione della quantità prodotta di un certo bene e sia

$$q(p) : (0, 10] \quad \rightarrow \;\; [0. + \infty) \;\; \textit{definita da} \quad q(t) = \frac{100}{p^2} - 1$$

la funzione che descrive la quantità richiesta, dal mercato, dello stesso bene in funzione del suo prezzo. Si determini la funzione composta $(C \circ q)(p)$ nell'ipotesi che la quantità prodotta coincida con la quantità richiesta, e se ne dia una interpretazione.