1. La funzione che rappresenta il volume d'aria nei polmoni dell'individuo al variare del tempo deve essere periodica con periodo 6 ed avere valore minimo 2 e massimo 4. Quindi la scelta migliore è la funzione d),

$$f(t) = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\,t\right)\,.$$

---

2. Se indichiamo con t il tempo in secondi la misura dei lati del rettangolo è data da

$$l_1(t) = 10 \qquad \text{e} \qquad l_2(t) = 10 + 2{,}2t\,.$$

La misura dell'area e della diagonale del rettangolo sono date rispettivamente da

$$A(t) = 10 \cdot (10 + 2{,}2t)$$

e

$$d(t) = \sqrt{10^2 + (10 + 2{,}2t)^2}\,.$$

L'istante in cui $l_2 = 21$ è dato dal valore t_0 per il quale $10 + 2{,}2t = 21$ ovvero $t_0 = 5$. La velocità (istantanea) di crescita della diagonale in t_0 è data da

$$\frac{d}{dt}(d(t))\Big|_{t=5} = \frac{2{,}2(10 + 2{,}2t)}{\sqrt{10^2 + (10 + 2{,}2t)^2}}\Big|_{t=5} \simeq 1{,}986\,.$$

La velocità (istantanea) di crescita dell'area in t_0 è data da

$$\frac{d}{dt}(A(t))\big|_{t=5} = 22\,.$$

---

3. Sia $C(q) = 11\,000 + 35q$ la funzione di costo e $R(q) = pq$ la funzione ricavo. Il numero di iscritti dipende dal prezzo secondo la funzione

$$q = 3\,000 - 20p \qquad \text{per} \qquad 0 \le p \le 150\,.$$

Il punto di pareggio si ottiene risolvendo l'equazione $C(q) = R(q)$,

$$11\,000 + 35q(p) = p \cdot q(p)\,.$$

Sostituendo $q(p)$ nell'equazione precedente, si ottiene

$$11\,000 + 35(3\,000 - 20p) = p(3\,000 - 20p)\,.$$

Ci sono due prezzi in corrispondenza dei quali l'equazione precedente è soddisfatta, $p_1 = 40$ e $p_2 = 145$ a cui corrispondono le quantità $q_1 = 2200$ e $q_2 = 100$. Il

punto di pareggio è individuato in corrispondenza della quantità minima tale che $C(q) = R(q)$. Quindi $q^* = 100$ e $p^* = 145$.
La funzione che rappresenta il profitto è data da

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{20}q^2 + 115q - 11000\,.$$

Il profitto è massimo in corrispondenza di $q^* = 1150$ e il prezzo che massimizza i profitti è $p^* = 92{,}5$.

---

4. Al fine di calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx\,,$$

Si osservi che conviene riscrivere la funzione integranda come somma di due funzioni razionali di cui è facile calcolare l'integrale.

Scriviamo

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

e determiniamo i valori dei coefficienti A e B nel seguente modo:

$$A(x+2) + B(x+1) = 1\,,$$

$$Ax + 2A + Bx + B = 1\,,$$

$$(A+B)x + (2A+B) = 1\,,$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1\,, \end{cases}$$

da cui si ottiene $A = 1$ e $B = -1$.

Possiamo quindi riscrivere l'integrale come segue

$$\int \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)}\,dx = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C\,.$$

Infine, calcoliamo l'integrale generalizzato

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \ln(x+1) - \ln(x+2)\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{(b+1)}{(b+2)} - \ln(0+1) + \ln(0+2) \\ &= \ln 2\,.\end{aligned}$$

Nota. Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

1. La funzione che rappresenta il volume d'aria nei polmoni dell'individuo al variare del tempo deve essere periodica con periodo 4 ed avere valore minimo 2 e massimo 4 e quindi la scelta migliore è la funzione b),

$$f(t) = 3 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

2. La velocità (istantanea) di crescita della diagonale in $t_0 = 10$ è data da

$$\frac{d}{dt}(d(t))\Big|_{t=10} = \frac{1{,}2(12 + 1{,}2t)}{\sqrt{12^2 + (12 + 1{,}2t)^2}}\Big|_{t=10} \simeq 1{,}073\,.$$

La velocità (istantanea) di crescita dell'area in t_0 è data da

$$\frac{d}{dt}(A(t))\Big|_{t=10} = 14{,}4\,.$$

3. Il punto di pareggio si ottiene risolvendo l'equazione

$$20\,160 + 71(6\,000 - 40p) = p(6\,000 - 40p)\,.$$

Si determinano due prezzi in corrispondenza dei quali l'equazione precedente è soddisfatta $p_1 = 78$ e $p_2 = 143$, a cui corrispondono le quantità $q_1 = 2880$ e $q_2 = 280$. Il punto di pareggio è individuato in corrispondenza della quantità minima tale che $C(q) = R(q)$. Quindi $q^* = 280$ e $p^* = 143$.

La funzione che rappresenta il profitto è data da

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{40}q^2 + 79q - 20160\,.$$

Il profitto è massimo in corrispondenza di $q^* = 1580$ e il prezzo che massimizza i profitti è $p^* = 110{,}5$.

4. Possiamo calcolare l'integrale indefinito come segue

$$\int \frac{2dx}{(x+1)(x-1)} = \int \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C\,.$$

[Nota bene: per un refuso, nel testo dell'esercizio distribuito in classe l'estremo inferiore di integrazione era 0 invece di 2. Tutti i compiti sono stati corretti e valutati tenendo conto di questo refuso, di cui ci scusiamo con gli studenti.]

Calcoliamo l'integrale generalizzato

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{2}{(x+1)(x-1)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \ln|x-1| - \ln|x+1|\Big|_2^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{|b-1|}{|b+1|} - \ln|2-1| + \ln|2+1| \\ &= \ln 3.\end{aligned}$$

Nota. Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

1. La funzione che rappresenta il volume d'aria nei polmoni dell'individuo al variare del tempo deve essere periodica con periodo 6 ed avere valore minimo 3 e massimo 5. Quindi la scelta migliore è la funzione c),

$$f(t) = 4 + \sin\left(\frac{\pi}{3}\,t\right) .$$

2. La velocità (istantanea) di crescita della diagonale in $t_0 = 10$ è data da

$$\frac{d}{dt}(d(t))\Big|_{t=10} = \frac{1{,}5(15 + 1{,}5t)}{\sqrt{15^2 + (15 + 1{,}5t)^2}}\Big|_{t=10} \simeq 1{,}341\,.$$

La velocità (istantanea) di crescita dell'area in t_0 è data da

$$\frac{d}{dt}(A(t))\big|_{t=10} = 22{,}5\,.$$

3. Il punto di pareggio si ottiene risolvendo l'equazione

$$14\,688 + 42(4\,500 - 18p) = p(4\,500 - 18p)\,.$$

Si determinano due prezzi in corrispondenza dei quali l'equazione precedente è soddisfatta $p_1 = 46$ e $p_2 = 246$, a cui corrispondono le quantità $q_1 = 3672$ e $q_2 = 72$. Il punto di pareggio è individuato in corrispondenza della quantità minima tale che $C(q) = R(q)$. Quindi $q^* = 72$ e $p^* = 246$.

La funzione che rappresenta il profitto è data da

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{18}q^2 + 208q - 14\,688.$$

Il profitto è massimo in corrispondenza di $q^* = 1872$ e il prezzo che massimizza i profitti è $p^* = 146$.

4. Possiamo calcolare l'integrale indefinito come segue

$$\int \frac{3dx}{(x+2)(x-1)} = \int \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+2| + C\,.$$

[Nota bene: per un refuso, nel testo dell'esercizio distribuito in classe l'estremo inferiore di integrazione era 0 invece di 2. Tutti i compiti sono stati corretti e valutati tenendo conto di questo refuso, di cui ci scusiamo con gli studenti.]

Calcoliamo l'integrale generalizzato

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{3}{(x+2)(x-1)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \ln|x-1| - \ln|x+2|\Big|_2^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{|b-1|}{|b+2|} - \ln|2-1| + \ln|2+2| \\ &= \ln 4\,.\end{aligned}$$

Nota. Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

1. La funzione che rappresenta il volume d'aria nei polmoni dell'individuo al variare del tempo deve essere periodica con periodo 4 ed avere valore minimo 1 e massimo 3. Quindi la scelta migliore è la funzione a),
$$f(t) = 2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\,t\right).$$

---

2. La velocità (istantanea) di crescita della diagonale in $t_0 = 10$ è data da
$$\frac{d}{dt}(d(t))\Big|_{t=10} = \frac{1{,}1(11+1{,}1t)}{\sqrt{12^2+(11+1{,}1t)^2}}\Big|_{t=10} \simeq 0{,}966\,.$$
La velocità (istantanea) di crescita dell'area in t_0 è data da
$$\frac{d}{dt}(A(t))\big|_{t=10} = 13{,}2\,.$$

---

3. Il punto di pareggio si ottiene risolvendo l'equazione
$$8820 + 39{,}5(4\,200 - 16p) = p(4\,200-16p)\,.$$
Ci sono due prezzi in corrispondenza dei quali l'equazione precedente è soddisfatta $p_1 = 42$ e $p_2 = 260$, a cui corrispondono le quantità $q_1 = 3528$ e $q_2 = 40$. Il punto di pareggio è individuato in corrispondenza della quantità minima tale che $C(q) = R(q)$. Quindi $q^* = 40$ e $p^* = 260$.
La funzione del profitto è data da
$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = -\frac{1}{16}q^2 + 223q - 8820\,.$$
Il profitto è massimo in corrispondenza di $q^* = 1784$ e il prezzo che massimizza i profitti è $p^* = 151$.

---

4. Possiamo calcolare l'integrale indefinito come segue
$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x+3)}\,dx = \ln|x+2| - \ln|x+3| + C\,.$$
Infine, calcoliamo l'integrale generalizzato
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \ln(x+2) - \ln(x+3)\big|_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} \ln\frac{(b+2)}{(b+3)} - \ln(0+2) + \ln(0+3) \\ &= \ln 3 - \ln 2.\end{aligned}$$