1. (a) I dati riportati nella prima tabella da sinistra corrispondono alla funzione esponenziale $f(x) = 16 \cdot (1{,}5)^x$.

   (b) I dati riportati nella seconda tabella non corrispondono né a un modello lineare né a uno esponenziale.

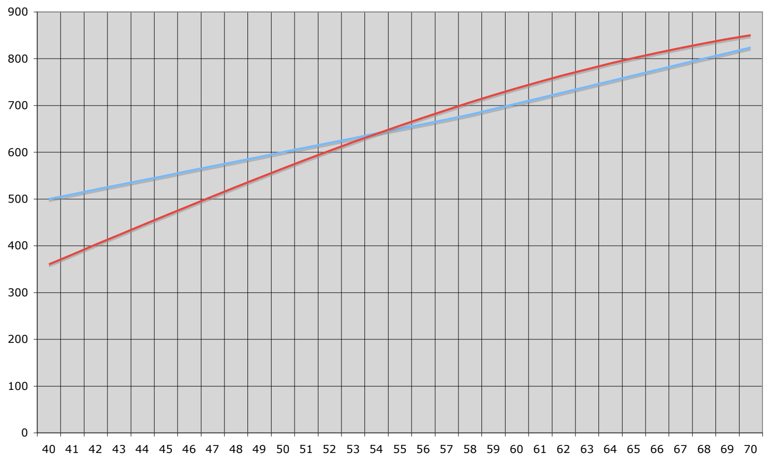
   (c) I dati nella terza tabella sono descritti dalla funzione lineare $h(x) = 5{,}3 + 1{,}2x$.

---

2. (a) Il salario complessivo pagato da Appol per $t$ ore settimanali di lavoro corrisponde alla seguente funzione lineare a tratti:

$$s_A(t) = \begin{cases} 500 + 10(t-40) & 40 \leq t \leq 58, \\ 680 + 12(t-58) & 58 < t \leq 70. \end{cases}$$

   Il grafico qualitativo di $s_A(t)$ (in azzurro) e di $s_G(t)$ (in rosso) è il seguente:




   (b) Paga di più Appol, perché $s_A(52) = 620 > 602{,}95 = s_G(52)$.

   (c) Paga di più Gugol, perché $s_A(58) = 680 < 706{,}25 = s_G(58)$.

   (d) Considerati (b) e (c), per il teorema degli zeri la risposta deve essere un valore di $t$ compreso tra 52 e 58. Procedendo per tentativi, troviamo che Gugol paga di più se $t \geq 55$.

---

3. La superficie del contenitore (privo di coperchio) è data da $\pi r^2 + 2\pi rh$, dove $r$ è il raggio della base e $h$ l'altezza del cilindro. Il problema consiste nel minimizzare tale area sotto il vincolo relativo al volume: $\pi r^2 h = 54\pi$, da cui si ottiene $h = 54/r^2$. Sostituendo nella funzione da minimizzare, il problema diventa (senza dimenticare l'ovvio vincolo $r \geq 0$):

$$\min_{r \geq 0} \left( \pi r^2 + 2\pi \cdot \frac{54}{r} \right).$$

Questa funzione è strettamente convessa, quindi la condizione del primo ordine è necessaria e sufficiente. Calcolando la derivata prima di tale funzione ed eguagliando a zero, si trova

$$2\pi r + 2\pi \cdot 54 \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 0,$$

da cui risulta $r^* = \sqrt[3]{54} = 3{,}780$. Per sostituzione, si determina anche $h^* = \sqrt[3]{54} = 3{,}780$.

---

4. La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$ è sempre positiva e risulta definita quando $x^2 - x^3 \geq 0$, ovvero per $x \leq 1$. La funzione $f(x)$ può anche essere scritta come $\sqrt{x^2 - x^3} = |x|\sqrt{1-x}$. Poiché consideriamo solo il primo quadrante, sappiamo che $x \geq 0$ e quindi possiamo "eliminare" il valore assoluto e scrivere soltanto $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

   Il problema chiede di calcolare l'integrale

$$I = \int_0^1 (x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

   Si può procedere per parti o per sostituzione. L'integrazione per parti è più facile, ma mostriamo entrambi i procedimenti.

   Applicando la regola di integrazione per parti, troviamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx &= -\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}} = \\ &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{15} = 0{,}2\overline{6}\,.\end{aligned}$$

   Procedendo per sostituzione, invece, si pone $u = 1 - x$ da cui si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$$

   e l'integrale diventa

$$\int x\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int -x\,u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

   Sostituendo $x = (1-u)$, troviamo

$$\int (u-1)\,u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C.$$

   Giacché $u = (1-x)$, si ricava

$$\int x\,(1-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

   e infine

$$I = \int_0^1 (x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = 0{,}2\overline{6}$$

---

**Nota.** Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

---

1. (a) I dati riportati nella prima tabella da sinistra corrispondono alla funzione esponenziale $f(x) = 12 \cdot (2{,}5)^x$.

   (b) I dati riportati nella seconda tabella sono descritti dalla funzione lineare $h(x) = 3{,}2 + 6{,}3x$.

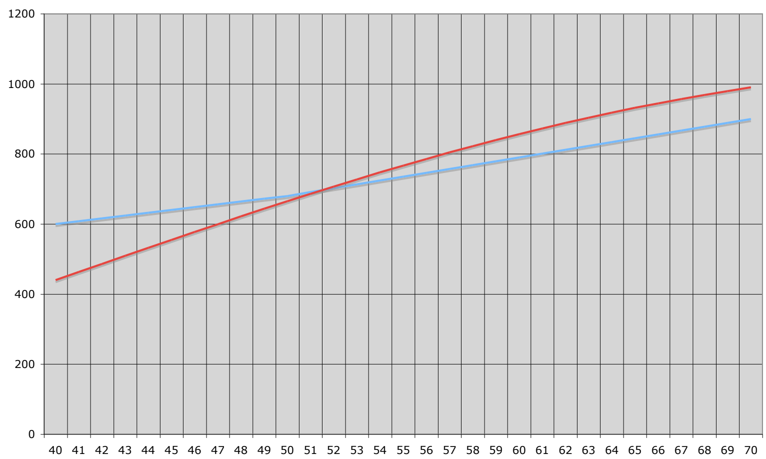
   (c) I dati nella terza tabella non corrispondono né a un modello lineare né a uno esponenziale.

---

2. (a) Il salario complessivo pagato da Appol per $t$ ore settimanali di lavoro corrisponde alla seguente funzione lineare a tratti:

$$s_A(t) = \begin{cases} 600 + 8(t-40) & 40 \leq t \leq 50, \\ 680 + 11(t-50) & 50 < t \leq 70. \end{cases}$$

   Il grafico qualitativo di $s_A(t)$ (in azzurro) e di $s_G(t)$ (in rosso) è il seguente:




   (b) Paga di più Appol, perché $s_A(49) = 672 > 643{,}50 = s_G(49)$.

   (c) Paga di più Gugol, perché $s_A(55) = 735 < 766{,}78 = s_G(55)$.

   (d) Gugol paga di più se $t \geq 52$.

---

3. Le dimensioni ottime sono $r^* = h^* = \sqrt[3]{36} \approx 3{,}302$.

---

4. L'integrale risulta

$$\int_0^3 (3x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x \approx 4{,}157$$

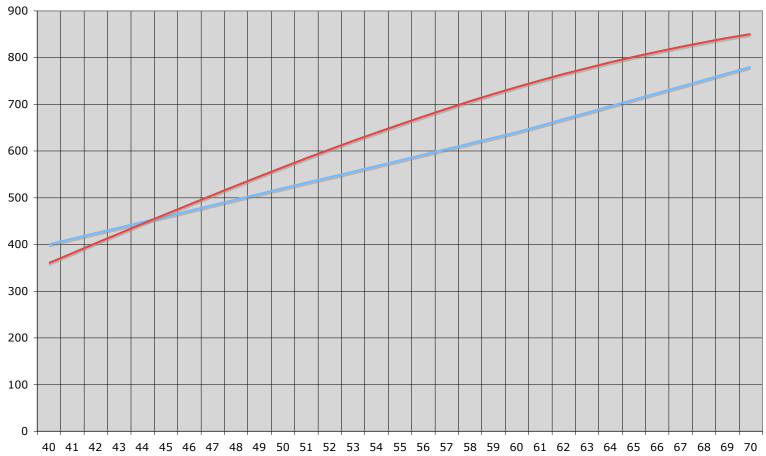
**Nota.** Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

1. (a) I dati riportati nella prima tabella da sinistra non corrispondono né a un modello lineare né a uno esponenziale.
   (b) I dati riportati nella seconda tabella sono descritti dalla funzione lineare $h(x) = 9{,}6 + 18{,}9x$.
   (c) I dati nella terza tabella corrispondono alla funzione esponenziale $f(x) = 18 \cdot (2{,}5)^x$.

2. (a) Il salario complessivo pagato da Appol per $t$ ore settimanali di lavoro corrisponde alla seguente funzione lineare a tratti:

$$s_A(t) = \begin{cases} 400 + 12(t-40) & 40 \le t \le 60, \\ 640 + 14(t-60) & 60 < t \le 70. \end{cases}$$

   Il grafico qualitativo di $s_A(t)$ (in azzurro) e di $s_G(t)$ (in rosso) è il seguente:




   (b) Paga di più Appol, perché $s_A(41) = 412 > 381{,}08 = s_G(41)$.
   (c) Paga di più Gugol, perché $s_A(47) = 484 < 505{,}59 = s_G(47)$.
   (d) Gugol paga di più se $t \ge 45$.

3. Le dimensioni ottime sono $r^* = h^* = \sqrt[3]{81} \approx 4{,}327$.

4. L'integrale risulta

$$\int_0^2 (2x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x \approx 1{,}508$$

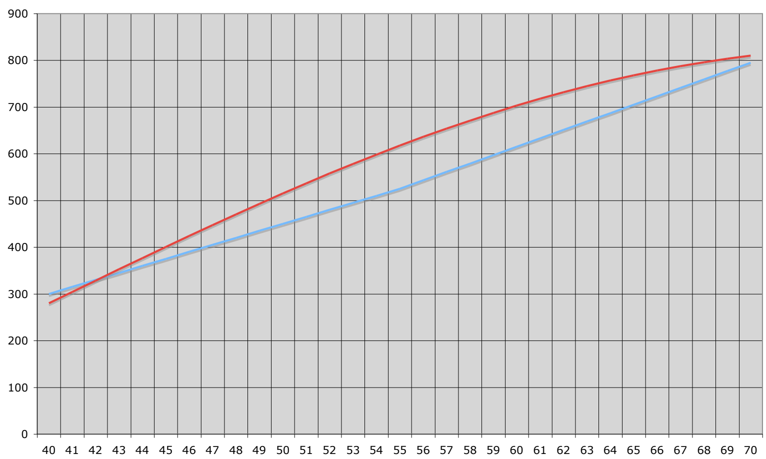
**Nota.** Per una descrizione più dettagliata del procedimento, consultare la soluzione della versione A.

1. (a) I dati riportati nella prima tabella da sinistra non corrispondono né a un modello lineare né a uno esponenziale.
   (b) I dati riportati nella seconda tabella corrispondono alla funzione esponenziale $f(x) = 32 \cdot (1{,}5)^x$.
   (c) I dati nella terza tabella sono descritti dalla funzione lineare $h(x) = 3{,}7 + 1{,}1x$.

2. (a) Il salario complessivo pagato da Appol per $t$ ore settimanali di lavoro corrisponde alla seguente funzione lineare a tratti:

$$s_A(t) = \begin{cases} 300 + 15(t-40) & 40 \leq t \leq 55, \\ 525 + 18(t-55) & 55 < t \leq 70. \end{cases}$$

   Il grafico qualitativo di $s_A(t)$ (in azzurro) e di $s_G(t)$ (in rosso) è il seguente:




   (b) Paga di più Appol, perché $s_A(41) = 315 > 304{,}32 = s_G(41)$.
   (c) Paga di più Gugol, perché $s_A(47) = 405 < 447{,}43 = s_G(47)$.
   (d) Gugol paga di più se $t \geq 43$.

3. Le dimensioni ottime sono $r^* = h^* = \sqrt[3]{27} = 3$.

4. L'integrale risulta

$$\int_0^4 (4x^2 - x^3)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x = 8{,}5\bar{3}$$